

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΦΥΣΙΚΟΥΣ Ι

ΓΕΝΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ: αφορούν την ύλη του Τελικού Διαγωνίσματος

Οι τέσσερις θεμελιώδεις υπόχωροι ενός $m \times n$ πίνακα A τάξης r

Για οποιονδήποτε $m \times n$ πίνακα A έχουμε την παραγοντοποίηση: $PA = LU$, όπου U είναι ένας $m \times n$ κλιμακωτός πίνακας στον οποίο οδηγεί η απαλοιφή Gauss του A , P είναι ένας $m \times m$ πίνακας μετάθεσης, και L είναι ένας $m \times m$ κάτω τριγωνικός πίνακας με 1 στη διαγώνιο. Υπενθυμίζεται ότι: (α) ο P πραγματοποιεί τις εναλλαγές γραμμών του A που απαιτεί, εν γένει, η προαναφερθείσα απαλοιφή, και (β) ο L περιέχει στις θέσεις (i, j) , κάτω από τη διαγώνιο, τους πολλαπλασιαστές λ_{ij} της απαλοιφής του PA η οποία οδηγεί –χωρίς εναλλαγές γραμμών– στον U .

- $\mathcal{R}(A) = \text{χώρος στηλών} \subseteq \mathbb{R}^m$. Διάσταση: $\dim \mathcal{R}(A) = r$. Βάση: οι r στήλες του A που αντιστοιχούν στις r στήλες με οδηγούς του κλιμακωτού πίνακα U .
- $\mathcal{N}(A) = \text{μηδενόχωρος} \subseteq \mathbb{R}^n$. Διάσταση: $\dim \mathcal{N}(A) = n - r$. Βάση: οι $(n - r)$ ειδικές λύσεις της ομογενούς εξίσωσης $Ax = 0$ ή της ισοδύναμης $Ux = 0$.
- $\mathcal{R}(A^T) = \text{χώρος γραμμών} \subseteq \mathbb{R}^n$. Διάσταση: $\dim \mathcal{R}(A^T) = r$. Βάση: οι r πρώτες μη μηδενικές γραμμές του κλιμακωτού πίνακα U .
- $\mathcal{N}(A^T) = \text{αριστερός μηδενόχωρος} \subseteq \mathbb{R}^m$. Διάσταση: $\dim \mathcal{N}(A^T) = m - r$. Βάση: οι $(m - r)$ τελευταίες γραμμές του αντιστρέψιμου $m \times m$ πίνακα $L^{-1}P$.

Ισχύει πάντοτε ότι: $r \leq m$ και $r \leq n$. Επιπλέον, έχουμε τις παρακάτω ιδιότητες ορθογωνιότητας:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(A) &= \mathcal{R}(A^T)^\perp, \quad (\text{ορθογώνια συμπληρώματα στον } \mathbb{R}^n), \\ \mathcal{N}(A^T) &= \mathcal{R}(A)^\perp, \quad (\text{ορθογώνια συμπληρώματα στον } \mathbb{R}^m). \end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι, για κάθε υπόχωρο V ισχύει η ταυτότητα: $(V^\perp)^\perp = V$.

Υπαρξη αντίστροφων ενός $m \times n$ πίνακα A τάξης r

- Ο A έχει έναν **αριστερό αντίστροφο** B (δηλ. $BA = I_n$) εάν και μόνον εάν: $r = n$.
- Ο A έχει έναν **δεξιό αντίστροφο** C (δηλ. $AC = I_m$) εάν και μόνον εάν: $r = m$.
- Ο A έχει έναν **δίπλευρο αντίστροφο** A^{-1} (δηλ. $A^{-1}A = I = AA^{-1}$) εάν και μόνον εάν: $r = m = n$.

Το τελευταίο αποτέλεσμα αποδεικνύει ότι μόνον ένας τετραγωνικός πίνακας μπορεί, κατ' αρχήν, να είναι αντιστρέψιμος, δηλ. να έχει δίπλευρο αντίστροφο. Πιο συγκεκριμένα: ένας $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας A τάξης r είναι **αντιστρέψιμος** εάν και μόνον εάν είναι **μη ιδιόμορφος**, δηλ. έχει ένα πλήρες σύνολο οδηγών ($r = n$).

Ο αντίστροφος ενός 2×2 πίνακα

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \quad \text{με } ad - bc \neq 0.$$

Πίνακας προβολής σε υπόχωρο

Έστω V ένας υπόχωρος του \mathbb{R}^m , με $\dim V = n$, που παράγεται από τα γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα: v_1, \dots, v_n . Εννοείται, βεβαίως, ότι: $n \leq m$. Ο $m \times m$ τετραγωνικός πίνακας προβολής P πάνω στον υπόχωρο V δίνεται από τον τύπο

$$P = A(A^T A)^{-1} A^T,$$

όπου A είναι ο $m \times n$ πίνακας που κατασκευάζεται από τα εν λόγω διανύσματα στήλης: $A = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$.

Ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt και η παραγοντοποίηση $A = QR$

Έστω ένα γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων v_1, \dots, v_n του \mathbb{R}^m . Εννοείται, βεβαίως, ότι: $n \leq m$. Κατασκευάζουμε μη μηδενικά ορθογώνια διανύσματα w_1, \dots, w_n και στη συνέχεια καταλήγουμε σε ορθοκανονικά διανύσματα q_1, \dots, q_n . Ως πρώτο βήμα θέτουμε: $w_1 = v_1$. Στο j -οστό βήμα αφαιρούμε από το v_j τις συνιστώσες του κατά τις κατευθύνσεις w_1, \dots, w_{j-1} που έχουν ήδη βρεθεί

$$w_j = v_j - \frac{w_1^T v_j}{w_1^T w_1} w_1 - \dots - \frac{w_{j-1}^T v_j}{w_{j-1}^T w_{j-1}} w_{j-1} .$$

Το q_j είναι το μοναδιαίο διάνυσμα: $q_j = w_j / \|w_j\|$. Συνοπτικά λοιπόν έχουμε ότι: $q_i^T q_j = \delta_{ij}$, για κάθε $i, j = 1, 2, \dots, n$. Λόγω του διαδοχικού τρόπου με τον οποίο εκτελείται η διαδικασία Gram-Schmidt έπεται ότι

$$v_j = (q_1^T v_j) q_1 + (q_2^T v_j) q_2 + \dots + (q_j^T v_j) q_j, \quad \text{για κάθε } j = 1, 2, \dots, n .$$

Συνεπώς, για οποιονδήποτε $m \times n$ πίνακα $A = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$, με γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες, έχουμε την παραγοντοποίηση: $A = QR$, όπου $Q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]$ είναι ένας $m \times n$ πίνακας με ορθοκανονικές στήλες και R είναι ένας $n \times n$ άνω τριγωνικός πίνακας με στοιχεία: $R_{ij} = q_i^T v_j$, με $i \leq j$. Ειδικότερα: $R_{jj} = q_j^T v_j = \|w_j\| \neq 0$.

Ορίζουσα ενός $n \times n$ τετραγωνικού πίνακα A

- $\det(A) = \pm(d_1 d_2 \dots d_n)$. (ο τύπος με τους οδηγούς)
Ο παραπάνω τύπος ισχύει για έναν μη ιδιόμορφο πίνακα, ενώ το εμφανιζόμενο πρόσημο εξαρτάται από το εάν το πλήθος των εναλλαγών γραμμών στη διαδικασία απαλοιφής Gauss είναι άρτιο (+) ή περιττό (-). Για έναν ιδιόμορφο πίνακα έχουμε, βεβαίως, ότι: $\det(A) = 0$.

- $\det(A) = \sum_{\sigma} \det(P_{\sigma}) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$, (ο μεγάλος τύπος)
όπου το σ -άθροισμα εκτείνεται πάνω σε όλες τις $n!$ το πλήθος μεταθέσεις των στοιχείων του συνόλου $\{1, 2, \dots, n\}$, και P_{σ} είναι ο πίνακας που προκύπτει όταν εφαρμόσουμε τη μετάθεση σ στις γραμμές του ταυτοτικού πίνακα. Ισχύει ότι: $\det(P_{\sigma}) = \pm 1$, σύμφωνα με το εάν απαιτείται ένα άρτιο (+) ή περιττό (-) πλήθος εναλλαγών γραμμών προκειμένου να ανάγουμε τον πίνακα μετάθεσης P_{σ} στον ταυτοτικό πίνακα.

- $\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} C_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij} C_{ij}$. (ο τύπος με τους συμπαράγοντες)
Για τον συμπαράγοντα, C_{ij} , έχουμε: $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$, όπου M_{ij} είναι ο υποπίνακας διάστασης $(n-1) \times (n-1)$ ο οποίος σχηματίζεται διαγράφοντας τη γραμμή i και τη στήλη j του A .

Σημειώνουμε ότι, εάν $\det(A) \neq 0$, τότε:

- $A^{-1} = \frac{C^T}{\det(A)}$, όπου $C = (C_{ij})$ είναι ο $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας των συμπαράγοντων.
- Κανόνας του Cramer: Η συνιστώσα j της $x = A^{-1}b$ ισούται με $x_j = \det(B_j) / \det(A)$, όπου B_j είναι ο πίνακας που προκύπτει με αντικατάσταση της στήλης j του A από το διάνυσμα b .

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα ενός $n \times n$ τετραγωνικού πίνακα A

Εξίσωση ιδιοτιμών: $Ax = \lambda x$, με $x \neq 0$. Χαρακτηριστική εξίσωση: $\det(A - \lambda I) = 0$. Ιδιόχωρος μιας ιδιοτιμής: $\mathcal{N}(A - \lambda I)$. Γεωμετρική πολλαπλότητα μιας ιδιοτιμής: $\dim \mathcal{N}(A - \lambda I)$. Αλγεβρική πολλαπλότητα μιας ιδιοτιμής: η πολλαπλότητά της ως ρίζας της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Ένας $n \times n$ πίνακας A λέγεται *διαγωνιοποιήσιμος* εάν έχει ένα πλήρες σύνολο γραμμικώς ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων, δηλ. εάν έχει n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, οπότε ισχύει ότι: $AS = S\Lambda \iff S^{-1}AS = \Lambda \iff A = S\Lambda S^{-1}$, όπου $S = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ είναι ο αντιστρέψιμος “πίνακας ιδιοδιανυσμάτων”, και Λ είναι ο διαγώνιος “πίνακας ιδιοτιμών” με τις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ του A κατά μήκος της διαγωνίου ($Ax_j = \lambda_j x_j$, με $x_j \neq 0$, για κάθε $j = 1, 2, \dots, n$).

- Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Συνεπώς, κάθε $n \times n$ πίνακας A που έχει n διακεκριμένες ιδιοτιμές, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_n$, είναι διαγωνιοποιήσιμος.
- Εάν $A =$ **συμμετρικός** ($A^T = A$), τότε $S \equiv Q =$ **ορθογώνιος** ($x_i^T x_j = \delta_{ij}$) και: $A = Q\Lambda Q^T$.
- Εάν $A =$ **Ερμιτιανός** ($A^H = A$), τότε $S \equiv U =$ **μοναδιαίος** ($x_i^H x_j = \delta_{ij}$) και: $A = U\Lambda U^H$.