ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΦΥΣΙΚΟ ΤΜΗΜΑ
Καθηγητής: Γ.Χ. Ψαλτάκης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΦΥΣΙΚΟΥΣ Ι

ΓΕΝΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ: αφορούν την ύλη του Τελικού Διαγωνίσματος

Οι τέσσερις θεμελιώδεις υπόχωροι ενός $m \times n$ πίνακα A τάξης r

Για οποιονδήποτε $m \times n$ πίνακα A έχουμε την παραγοντοποίηση: $PA = LU$, όπου U είναι ένας $m \times n$ κλιμακωτός πίνακας στον οποίο οδηγεί η απαλοιφή Gauss του A, P είναι ένας $m \times m$ πίνακας μετάθεσης, και L είναι ένας $m \times m$ κάτω τριγωνικός πίνακας με 1 στη διαγώνιο. Υπενθυμίζεται ότι: (α) ο P πραγματοποιεί τις εναλλαγές γραμμών του A που απαιτεί, εν γένει, η προαναφερθείσα απαλοιφή, και (β) ο L περιέχει στις θέσεις (i, j), κάτω από τη διαγώνιο, τους πολλαπλασιαστές λ_{ij} της απαλοιφής του PA η οποία οδηγεί –χωρίς εναλλαγές γραμμών– στον U.

- $\mathcal{R}(A)$ = **χώρος στηλών** $\subseteq \mathbb{R}^m$. Διάσταση: $\dim \mathcal{R}(A) = r$. Βάση: οι r στήλες του A που αντιστοιχούν στις r στήλες με οδηγούς του κλιμακωτού πίνακα U.
- $\mathcal{N}(A)$ = **μηδενόχωρος** $\subseteq \mathbb{R}^n$. Διάσταση: $\dim \mathcal{N}(A) = n - r$. Βάση: οι $(n - r)$ ειδικές λύσεις της ομογενούς εξίσωσης $Ax = 0$ ή της ισοδύναμης $Ux = 0$.
- $\mathcal{R}(A^{\mathrm{T}})$ = **χώρος γραμμών** $\subseteq \mathbb{R}^n$. Διάσταση: $\dim \mathcal{R}(A^{\mathrm{T}}) = r$. Βάση: οι r πρώτες μη μηδενικές γραμμές του κλιμακωτού πίνακα U.
- $\mathcal{N}(A^{\mathrm{T}})$ = **αριστερός μηδενόχωρος** $\subseteq \mathbb{R}^m$. Διάσταση: $\dim \mathcal{N}(A^{\mathrm{T}}) = m - r$. Βάση: οι $(m - r)$ τελευταίες γραμμές του αντιστρέψιμου $m \times m$ πίνακα $L^{-1}P$.

Ισχύει πάντοτε ότι: $r \leq m$ και $r \leq n$. Επιπλέον, έχουμε τις παρακάτω ιδιότητες ορθογωνιότητας:

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(A^{\mathrm{T}})^{\perp} , \quad (\text{ορθογώνια συμπληρώματα στον } \mathbb{R}^n) , \\ &\mathcal{N}(A^{\mathrm{T}}) = \mathcal{R}(A)^{\perp} , \quad (\text{ορθογώνια συμπληρώματα στον } \mathbb{R}^m) . \end{aligned}}$$

Σημειώνουμε ότι, για κάθε υπόχωρο V ισχύει η ταυτότητα: $(V^{\perp})^{\perp} = V$.

Ύπαρξη αντίστροφων ενός $m \times n$ πίνακα A τάξης r

- Ο A έχει έναν **αριστερό αντίστροφο** B (δηλ. $BA = I_n$) εάν και μόνον εάν: $r = n$.
- Ο A έχει έναν **δεξιό αντίστροφο** C (δηλ. $AC = I_m$) εάν και μόνον εάν: $r = m$.
- Ο A έχει έναν **δίπλευρο αντίστροφο** A^{-1} (δηλ. $A^{-1}A = I = AA^{-1}$) εάν και μόνον εάν: $r = m = n$.

Το τελευταίο αποτέλεσμα αποδεικνύει ότι μόνον ένας τετραγωνικός πίνακας μπορεί, κατ' αρχήν, να είναι αντιστρέψιμος, δηλ. να έχει δίπλευρο αντίστροφο. Πιο συγκεκριμένα: ένας $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας A τάξης r είναι *αντιστρέψιμος* εάν και μόνον εάν είναι *μη ιδιόμορφος*, δηλ. έχει ένα *πλήρες σύνολο οδηγών* $(r = n)$.

Ο αντίστροφος ενός 2×2 πίνακα

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} , \quad \text{με } ad - bc \neq 0 .$$

Πίνακας προβολής σε υπόχωρο

Έστω V ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$, με $\dim V = n$, που παράγεται από τα γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα: $v_1, \ldots, v_n$. Εννοείται, βεβαίως, ότι: $n \leq m$. Ο $m \times m$ τετραγωνικός πίνακας προβολής P πάνω στον υπόχωρο V δίνεται από τον τύπο

$$P = A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}} ,$$

όπου A είναι ο $m \times n$ πίνακας που κατασκευάζεται από τα εν λόγω διανύσματα στήλης: $A = [v_1 \;\; v_2 \;\; \cdots \;\; v_n]$.

Ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt και η παραγοντοποίηση $A = QR$

Έστω ένα γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων $v_1, \ldots, v_n$ του $\mathbb{R}^m$. Εννοείται, βεβαίως, ότι: $n \leq m$. Κατασκευάζουμε μη μηδενικά ορθογώνια διανύσματα $w_1, \ldots, w_n$ και στη συνέχεια καταλήγουμε σε ορθοκανονικά διανύσματα $q_1, \ldots, q_n$. Ως πρώτο βήμα θέτουμε: $w_1 = v_1$. Στο j-οστό βήμα αφαιρούμε από το v_j τις συνιστώσες του κατά τις κατευθύνσεις $w_1, \ldots, w_{j-1}$ που έχουν ήδη βρεθεί

$$w_j = v_j - \frac{w_1^{\mathrm{T}} v_j}{w_1^{\mathrm{T}} w_1} w_1 - \cdots - \frac{w_{j-1}^{\mathrm{T}} v_j}{w_{j-1}^{\mathrm{T}} w_{j-1}} w_{j-1} \, .$$

Το q_j είναι το μοναδιαίο διάνυσμα: $q_j = w_j / \parallel w_j \parallel$. Συνοπτικά λοιπόν έχουμε ότι: $q_i^{\mathrm{T}} q_j = \delta_{ij}$, για κάθε $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Λόγω του διαδοχικού τρόπου με τον οποίο εκτελείται η διαδικασία Gram-Schmidt έπεται ότι

$$v_j = (q_1^{\mathrm{T}} v_j) q_1 + (q_2^{\mathrm{T}} v_j) q_2 + \cdots + (q_j^{\mathrm{T}} v_j) q_j \, , \quad \text{για κάθε } \; j = 1, 2, \ldots, n \, .$$

Συνεπώς, για οποιονδήποτε $m \times n$ πίνακα $A = [v_1 \;\; v_2 \;\; \cdots \;\; v_n]$, με γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες, έχουμε την παραγοντοποίηση: $A = QR$, όπου $Q = [q_1 \;\; q_2 \;\; \cdots \;\; q_n]$ είναι ένας $m \times n$ πίνακας με ορθοκανονικές στήλες και R είναι ένας $n \times n$ άνω τριγωνικός πίνακας με στοιχεία: $R_{ij} = q_i^{\mathrm{T}} v_j$, με $i \leq j$. Ειδικότερα: $R_{jj} = q_j^{\mathrm{T}} v_j = \parallel w_j \parallel \neq 0$.

Ορίζουσα ενός $n \times n$ τετραγωνικού πίνακα A

- $\det(A) = \pm (d_1 d_2 \cdots d_n)$. **(ο τύπος με τους οδηγούς)**
  Ο παραπάνω τύπος ισχύει για έναν *μη ιδιόμορφο* πίνακα, ενώ το εμφανιζόμενο πρόσημο εξαρτάται από το εάν το πλήθος των εναλλαγών γραμμών στη διαδικασία απαλοιφής Gauss είναι άρτιο (+) ή περιττό (−). Για έναν *ιδιόμορφο* πίνακα έχουμε, βεβαίως, ότι: $\det(A) = 0$.

- $\det(A) = \sum_{\sigma} \det(P_\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$, **(ο μεγάλος τύπος)**
  όπου το σ-άθροισμα εκτείνεται πάνω σε όλες τις $n!$ το πλήθος μεταθέσεις των στοιχείων του συνόλου $\{1, 2, \ldots, n\}$, και P_σ είναι ο πίνακας που προκύπτει όταν εφαρμόσουμε τη μετάθεση σ στις γραμμές του ταυτοτικού πίνακα. Ισχύει ότι: $\det(P_\sigma) = \pm 1$, σύμφωνα με το εάν απαιτείται ένα άρτιο (+) ή περιττό (−) πλήθος εναλλαγών γραμμών προκειμένου να ανάγουμε τον πίνακα μετάθεσης P_σ στον ταυτοτικό πίνακα.

- $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$. **(ο τύπος με τους συμπαράγοντες)**
  Για τον συμπαράγοντα, C_{ij}, έχουμε: $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$, όπου M_{ij} είναι ο υποπίνακας διάστασης $(n-1) \times (n-1)$ ο οποίος σχηματίζεται διαγράφοντας τη γραμμή i και τη στήλη j του A.

Σημειώνουμε ότι, εάν $\det(A) \neq 0$, τότε:

- $A^{-1} = \dfrac{C^{\mathrm{T}}}{\det(A)}$, όπου $C = (C_{ij})$ είναι ο $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας των συμπαραγόντων.

- Κανόνας του Cramer: Η συνιστώσα j της $x = A^{-1} b$ ισούται με $x_j = \det(B_j) / \det(A)$, όπου B_j είναι ο πίνακας που προκύπτει με αντικατάσταση της στήλης j του A από το διάνυσμα b.

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα ενός $n \times n$ τετραγωνικού πίνακα A

Εξίσωση ιδιοτιμών: $Ax = \lambda x$, με $x \neq 0$. Χαρακτηριστική εξίσωση: $\det(A - \lambda I) = 0$. Ιδιόχωρος μιας ιδιοτιμής: $\mathcal{N}(A - \lambda I)$. Γεωμετρική πολλαπλότητα μιας ιδιοτιμής: $\dim \mathcal{N}(A - \lambda I)$. Αλγεβρική πολλαπλότητα μιας ιδιοτιμής: η πολλαπλότητά της ως ρίζας τής χαρακτηριστικής εξίσωσης. Ένας $n \times n$ πίνακας A λέγεται *διαγωνιοποιήσιμος* εάν έχει ένα *πλήρες σύνολο γραμμικώς ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων*, δηλ. εάν έχει n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, οπότε ισχύει ότι: $AS = S\Lambda \iff S^{-1} A S = \Lambda \iff A = S \Lambda S^{-1}$, όπου $S = [x_1 \;\; x_2 \;\; \cdots \;\; x_n]$ είναι ο αντιστρέψιμος "πίνακας ιδιοδιανυσμάτων", και Λ είναι ο διαγώνιος "πίνακας ιδιοτιμών" με τις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ του A κατά μήκος της διαγωνίου ($A x_j = \lambda_j x_j$, με $x_j \neq 0$, για κάθε $j = 1, 2, \ldots, n$).

- Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Συνεπώς, κάθε $n \times n$ πίνακας A που έχει n διακεκριμένες ιδιοτιμές, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots \neq \lambda_n$, είναι διαγωνιοποιήσιμος.

- Εάν $A =$ **συμμετρικός** ($A^{\mathrm{T}} = A$), τότε $S \equiv Q =$ **ορθογώνιος** ($x_i^{\mathrm{T}} x_j = \delta_{ij}$) και: $A = Q \Lambda Q^{\mathrm{T}}$.

- Εάν $A =$ **Ερμιτιανός** ($A^{\mathrm{H}} = A$), τότε $S \equiv U =$ **μοναδιαίος** ($x_i^{\mathrm{H}} x_j = \delta_{ij}$) και: $A = U \Lambda U^{\mathrm{H}}$.