ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΦΥΣΙΚΟ ΤΜΗΜΑ
Καθηγητής: Γ.Χ. Ψαλτάκης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΦΥΣΙΚΟΥΣ Ι

ΓΕΝΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ: αφορούν την ύλη της Προόδου

Οι τέσσερις θεμελιώδεις υπόχωροι ενός $m \times n$ πίνακα A τάξης r

Για οποιονδήποτε $m \times n$ πίνακα A έχουμε την παραγοντοποίηση: $PA = LU$, όπου U είναι ένας $m \times n$ κλιμακωτός πίνακας στον οποίο οδηγεί η απαλοιφή Gauss του A, P είναι ένας $m \times m$ πίνακας μετάθεσης, και L είναι ένας $m \times m$ κάτω τριγωνικός πίνακας με 1 στη διαγώνιο. Υπενθυμίζεται ότι: (α) ο P πραγματοποιεί τις εναλλαγές γραμμών του A που απαιτεί, εν γένει, η προαναφερθείσα απαλοιφή, και (β) ο L περιέχει στις θέσεις (i, j), κάτω από τη διαγώνιο, τους πολλαπλασιαστές λ_{ij} της απαλοιφής του PA η οποία οδηγεί –χωρίς εναλλαγές γραμμών– στον U.

- $\mathcal{R}(A)$ = **χώρος στηλών** $\subseteq \mathbb{R}^m$. Διάσταση: $\dim \mathcal{R}(A) = r$. Βάση: οι r στήλες του A που αντιστοιχούν στις r στήλες με οδηγούς του κλιμακωτού πίνακα U.
- $\mathcal{N}(A)$ = **μηδενόχωρος** $\subseteq \mathbb{R}^n$. Διάσταση: $\dim \mathcal{N}(A) = n - r$. Βάση: οι $(n - r)$ ειδικές λύσεις της ομογενούς εξίσωσης $Ax = 0$ ή της ισοδύναμης $Ux = 0$.
- $\mathcal{R}(A^{\mathrm{T}})$ = **χώρος γραμμών** $\subseteq \mathbb{R}^n$. Διάσταση: $\dim \mathcal{R}(A^{\mathrm{T}}) = r$. Βάση: οι r πρώτες μη μηδενικές γραμμές του κλιμακωτού πίνακα U.
- $\mathcal{N}(A^{\mathrm{T}})$ = **αριστερός μηδενόχωρος** $\subseteq \mathbb{R}^m$. Διάσταση: $\dim \mathcal{N}(A^{\mathrm{T}}) = m - r$. Βάση: οι $(m - r)$ τελευταίες γραμμές του αντιστρέψιμου $m \times m$ πίνακα $L^{-1}P$.

Ισχύει πάντοτε ότι: $r \leq m$ και $r \leq n$.

Ύπαρξη αντίστροφων ενός $m \times n$ πίνακα A τάξης r

- Ο A έχει έναν **αριστερό αντίστροφο** B (δηλ. $BA = I_n$) εάν και μόνον εάν: $r = n$.
- Ο A έχει έναν **δεξιό αντίστροφο** C (δηλ. $AC = I_m$) εάν και μόνον εάν: $r = m$.
- Ο A έχει έναν **δίπλευρο αντίστροφο** A^{-1} (δηλ. $A^{-1}A = I = AA^{-1}$) εάν και μόνον εάν: $r = m = n$.

Το τελευταίο αποτέλεσμα αποδεικνύει ότι μόνον ένας τετραγωνικός πίνακας μπορεί, κατ' αρχήν, να είναι αντιστρέψιμος, δηλ. να έχει δίπλευρο αντίστροφο. Πιο συγκεκριμένα: ένας $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας A τάξης r είναι *αντιστρέψιμος* εάν και μόνον εάν είναι *μη ιδιόμορφος*, δηλ. έχει ένα *πλήρες σύνολο οδηγών* $(r = n)$.

Ο αντίστροφος ενός 2×2 πίνακα

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} , \quad \text{με } ad - bc \neq 0 \, .$$