Παράρτημα A

Μεταθέσεις και πίνακες μεταθέσεων

Το παρόν παράρτημα βασίζεται στις σελίδες 671–8 του βιβλίου:
Γ. Χ. Ψαλτάκης, *Κβαντικά Συστήματα Πολλών Σωματιδίων*
(Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2008).

A.1 Μεταθέσεις

Μια μετάθεση (permutation) σ είναι μια ένα-προς-ένα απεικόνιση του συνόλου $S_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, με $n \geq 2$, στον εαυτό του. Έστω $\sigma(i)$ η εικόνα του φυσικού αριθμού i μέσω της μετάθεσης σ. Ο χαρακτηρισμός ένα-προς-ένα σημαίνει ότι: $\sigma(i) \neq \sigma(j)$, εάν $i \neq j$. Επομένως, το σύνολο $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\}$ περιέχει n διακεκριμένα στοιχεία που δεν είναι άλλα από τους φυσικούς αριθμούς $1, 2, \ldots, n$, σε μια διαφορετική όμως διάταξη. Ένας πρακτικός τρόπος προσδιορισμού μιας μετάθεσης σ είναι ο εξής

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} , \tag{A.1}$$

δηλ. κάτω από κάθε στοιχείο του S_n τοποθετούμε την αντίστοιχη εικόνα του. Προφανώς, δεν είναι αναγκαίο να γράφουμε τα στοιχεία του S_n πάντα στη διάταξη $1, 2, \ldots, n$, αρκεί κάτω από κάθε στοιχείο να βρίσκεται η αντίστοιχη εικόνα. Για παράδειγμα, έστω $S_4 = \{1, 2, 3, 4\}$. Η μετάθεση σ για την οποία $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 4$, $\sigma(3) = 3$, $\sigma(4) = 1$, μπορεί να προσδιοριστεί με τους παρακάτω ισοδύναμους τρόπους

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \ \text{ή} \ \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \ \text{ή} \ \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} . \tag{A.2}$$

Η σύνθεση μιας μετάθεσης σ με μια μετάθεση ρ δημιουργεί τη μετάθεση $\rho \circ \sigma$, η οποία ορίζεται με τον συνήθη τρόπο σύνθεσης δύο συναρτήσεων. Συγκεκριμένα, η $\rho \circ \sigma$ ορίζεται ως η μετάθεση που αντιστοιχεί στο στοιχείο i την εικόνα $\rho(\sigma(i))$, δηλ. $(\rho \circ \sigma)(i) = \rho(\sigma(i))$. Για παράδειγμα, εάν σ είναι η μετάθεση (A.2) και ρ είναι η μετάθεση

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} , \tag{A.3}$$

τότε

$$\rho \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \tag{A.4}$$

και

$$\sigma \circ \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}. \tag{A.5}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι, εν γένει, $\rho \circ \sigma \neq \sigma \circ \rho$.

Η μετάθεση που αφήνει όλα τα στοιχεία του S_n σταθερά ονομάζεται ταυτοτική μετάθεση και συμβολίζεται με ϵ

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}. \tag{A.6}$$

Προφανώς, ισχύει ότι $\sigma \circ \epsilon = \sigma = \epsilon \circ \sigma$, για κάθε μετάθεση σ, και επιπλέον η ϵ είναι η μοναδική μετάθεση που έχει αυτήν τη χαρακτηριστική ιδιότητα. Για κάθε μετάθεση σ, υπάρχει μία μοναδική μετάθεση σ^{-1}, τέτοια ώστε: $\sigma \circ \sigma^{-1} = \epsilon = \sigma^{-1} \circ \sigma$, δηλ. $\sigma^{-1}(\sigma(i)) = i$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$. Η σ^{-1} ονομάζεται η αντίστροφη της σ και έχουμε

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}. \tag{A.7}$$

Εάν για ένα ζεύγος στοιχείων $i < j$ του S_n ισχύει ότι $\sigma(i) > \sigma(j)$, τότε λέγεται ότι η σ περιέχει μια αναστροφή (inversion). Ο ολικός αριθμός αναστροφών της σ θα συμβολίζεται με $N(\sigma)$. Για τη μετάθεση του παραδείγματος (A.2) έχουμε: $N(\sigma) = 4$. Γενικά, ισχύει ότι: $N(\sigma) = N(\sigma^{-1})$, για κάθε μετάθεση σ. Επιπλέον, είναι προφανές ότι: $N(\epsilon) = 0$.

Ως πρόσημο μιας μετάθεσης σ ορίζεται ο αριθμός: $(-1)^{N(\sigma)}$. Εάν ο ολικός αριθμός αναστροφών $N(\sigma)$ της σ είναι άρτιος, τότε προφανώς $(-1)^{N(\sigma)} = 1$ και η μετάθεση λέγεται ότι είναι άρτια. Αντιστοίχως, εάν ο ολικός αριθμός αναστροφών είναι περιττός, τότε $(-1)^{N(\sigma)} = -1$ και η μετάθεση λέγεται ότι είναι περιττή. Από τον ορισμό του προσήμου και τις προηγούμενες παρατηρήσεις έπονται οι απλές ταυτότητες:

$$(-1)^{N(\epsilon)} = +1, \quad (-1)^{N(\sigma)} = (-1)^{N(\sigma^{-1})}. \tag{A.8}$$

Γενικότερα, έχουμε το παρακάτω πολύ χρήσιμο θεώρημα.

Θεώρημα A.1 *Έστω δύο μεταθέσεις ρ και σ. Ισχύει ότι*

$$(-1)^{N(\rho \circ \sigma)} = (-1)^{N(\rho)} \cdot (-1)^{N(\sigma)}. \tag{A.9}$$

Απόδειξη: Η ρ μπορεί να παρασταθεί με τη μορφή

$$\rho = \begin{pmatrix} \cdots & \sigma(i) & \cdots & \sigma(j) & \cdots \\ \cdots & \rho(\sigma(i)) & \cdots & \rho(\sigma(j)) & \cdots \end{pmatrix}, \tag{A.10}$$

δεδομένου ότι κάθε στοιχείο του S_n εμφανίζεται στην πρώτη γραμμή. Επομένως, για να μετρήσουμε τις αναστροφές της ρ, αρκεί να συγκρίνουμε τα $\sigma(i)$ και $\sigma(j)$ με τα $\rho(\sigma(i))$ και $\rho(\sigma(j))$. Για ένα δοσμένο ζεύγος $i < j$ έχουμε τέσσερις μόνο δυνατότητες:

1. $i < j$, $\sigma(i) < \sigma(j)$, $\rho(\sigma(i)) < \rho(\sigma(j))$: καμία αναστροφή στην σ,
   καμία αναστροφή στην ρ,
   καμία αναστροφή στην $\rho \circ \sigma$.

2. $i < j$, $\sigma(i) < \sigma(j)$, $\rho(\sigma(i)) > \rho(\sigma(j))$: καμία αναστροφή στην σ,
   μία αναστροφή στην ρ,
   μία αναστροφή στην $\rho \circ \sigma$.
3. $i < j$, $\sigma(i) > \sigma(j)$, $\rho(\sigma(i)) > \rho(\sigma(j))$: μία αναστροφή στην σ,
   καμία αναστροφή στην ρ,
   μία αναστροφή στην $\rho \circ \sigma$.
4. $i < j$, $\sigma(i) > \sigma(j)$, $\rho(\sigma(i)) < \rho(\sigma(j))$: μία αναστροφή στην σ,
   μία αναστροφή στην ρ,
   καμία αναστροφή στην $\rho \circ \sigma$.

Εξετάζοντας τις παραπάνω δυνατότητες, συμπεραίνουμε ότι ο $N(\rho \circ \sigma)$ διαφέρει από τον $N(\rho) + N(\sigma)$ πάντα κατά έναν άρτιο αριθμό. Επομένως, ισχύει ότι: $(-1)^{N(\rho\circ\sigma)} = (-1)^{N(\rho)} \cdot (-1)^{N(\sigma)}$. ■

Θεώρημα A.2 *Εάν μια μετάθεση σ αφήνει κάποιο στοιχείο του S_n σταθερό, τότε οι αναστροφές που περιέχουν το στοιχείο αυτό μπορούν να αγνοηθούν στον υπολογισμό του προσήμου της σ.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι $\sigma(j) = j$. Υπάρχουν $j-1$ στοιχεία του S_n μικρότερα του j και $n-j$ στοιχεία του S_n μεγαλύτερα του j. Επομένως, η σ έχει τη γενική μορφή

$$\sigma = \begin{pmatrix} \overbrace{1, \cdots, j-1}^{j-1}, & j, & \overbrace{j+1, \cdots, n}^{n-j} \\ \sigma(1), \cdots, \sigma(j-1), & j, & \sigma(j+1), \cdots, \sigma(n) \end{pmatrix} . \tag{A.11}$$

Για $i < j$ μια αναστροφή εμφανίζεται εάν και μόνο εάν $\sigma(i) > \sigma(j) = j$. Αντιστοίχως, για $i > j$ μια αναστροφή εμφανίζεται εάν και μόνο εάν $\sigma(i) < \sigma(j) = j$. Έστω l ο αριθμός των στοιχείων i του S_n τέτοια ώστε: $i < j$ και $\sigma(i) > j$. Ομοίως, έστω m ο αριθμός των στοιχείων i του S_n τέτοια ώστε: $i > j$ και $\sigma(i) < j$. Ο αριθμός $l + m$ ταυτίζεται λοιπόν με τον αριθμό των αναστροφών που περιέχουν το στοιχείο j. Παρατηρούμε τώρα ότι

$$\begin{aligned} n - j &= (\text{αριθμός των στοιχείων του } S_n \text{ μεγαλύτερων του } j) \\ &= l + [(n-j) - m] , \end{aligned} \tag{A.12}$$

άρα $l = m$. Επομένως, υπάρχουν $l + m = 2l$ αναστροφές που περιέχουν το στοιχείο j. Δεδομένου ότι ο αριθμός $2l$ είναι άρτιος, μπορεί να αγνοηθεί στον υπολογισμό του πρόσημου $(-1)^{N(\sigma)}$. ■

Μια μετάθεση τ χαρακτηρίζεται ως αντιμετάθεση (transposition) εάν υπάρχει ένα ζεύγος στοιχείων, $i \neq j$, τέτοιο ώστε

$$\tau(i) = j \quad \text{και} \quad \tau(j) = i , \tag{A.13}$$

ενώ για όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του S_n έχουμε: $\tau(k) = k$. Με άλλα λόγια, μια αντιμετάθεση έχει τη μορφή

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ 1 & \cdots & j & \cdots & i & \cdots & n \end{pmatrix} . \tag{A.14}$$

Προφανώς, για κάθε αντιμετάθεση τ ισχύει ότι: $\tau \circ \tau = \epsilon$, ή ισοδύναμα $\tau^{-1} = \tau$.

Θεώρημα A.3 *Κάθε αντιμετάθεση είναι περιττή.*

Απόδειξη: Έστω τ μια αντιμετάθεση των στοιχείων i και j. Σύμφωνα με το θεώρημα A.2, στον υπολογισμό του προσήμου $(-1)^{N(\tau)}$ μπορούμε να αγνοήσουμε τις αναστροφές που περιέχουν στοιχεία του S_n διάφορα του i και j. Παραμένει λοιπόν ακριβώς μία αναστροφή που πρέπει να ληφθεί υπ' όψιν και επομένως: $(-1)^{N(\tau)} = (-1)^1 = -1$. ■

Θεώρημα A.4 *Κάθε μετάθεση μπορεί να εκφρασθεί ως μια σύνθεση αντιμεταθέσεων.*

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε το θεώρημα με τη μέθοδο της επαγωγής ως προς την παράμετρο n του συνόλου $S_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Για $n = 2$ υπάρχουν συνολικά $2! = 2$ μεταθέσεις των στοιχείων του συνόλου $S_2 = \{1, 2\}$; συγκεκριμένα οι εξής

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} , \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} . \tag{A.15}$$

Προφανώς, η μετάθεση ρ είναι μια αντιμετάθεση ενώ για την ταυτοτική μετάθεση ϵ έχουμε την ισότητα: $\rho \circ \rho = \epsilon$. Επομένως, για $n = 2$ το θεώρημα ισχύει.

Έστω $n > 2$ και ας υποθέσουμε ότι το θεώρημα ισχύει για $n - 1$, δηλ. ισχύει για όλες τις μεταθέσεις του συνόλου $S_{n-1} = \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Έστω σ μια τυχαία μετάθεση του συνόλου $S_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Ορίζουμε τον φυσικό αριθμό l από τη σχέση: $l = \sigma(n)$. Εάν $l \neq n$, τότε ορίζουμε ως τ την αντιμετάθεση του S_n με: $\tau(l) = n$ και $\tau(n) = l$. Εάν $l = n$, τότε ορίζουμε ως τ την ταυτοτική μετάθεση του S_n, δηλ. $\tau = \epsilon$. Σε κάθε περίπτωση, η $\tau \circ \sigma$ είναι μια μετάθεση του S_n τέτοια ώστε

$$(\tau \circ \sigma)(n) = \tau(\sigma(n)) = \tau(l) = n . \tag{A.16}$$

Με άλλα λόγια, η μετάθεση $\tau \circ \sigma$ αφήνει το στοιχείο n σταθερό. Επομένως, μπορούμε να θεωρήσουμε την $\tau \circ \sigma$ ως μια μετάθεση του συνόλου $S_{n-1} = \{1, 2, \ldots, n-1\}$ για την οποία, από την υπόθεση της επαγωγής, θα υπάρχουν αντιμεταθέσεις $\tau_1, \ldots, \tau_s$ του S_{n-1}, τέτοιες ώστε

$$\tau \circ \sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_s . \tag{A.17}$$

Η τετριμμένη επέκταση της δράσης των $\tau_1, \ldots, \tau_s$ στο σύνολο S_n, θέτοντας εξ ορισμού $\tau_1(n) = \cdots = \tau_s(n) = n$, διατηρεί τον αντιμεταθετικό τους χαρακτήρα αλλά και την ισχύ της εξίσωσης (A.17), που θεωρείται πλέον ως μια εξίσωση μεταξύ μεταθέσεων του S_n. Μπορούμε τώρα να γράψουμε

$$\sigma = \tau^{-1} \circ \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_s = \tau \circ \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_s , \tag{A.18}$$

ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξή μας. ■

Από τα θεωρήματα A.1, A.3, και A.4 συνάγεται αμέσως η παρακάτω σημαντική πρόταση.

Πρόταση A.5 *Ανεξάρτητα από τον τρόπο με τον οποίο μια μετάθεση σ έχει εκφρασθεί ως σύνθεση αντιμεταθέσεων $\tau_1, \ldots, \tau_s$, το πλήθος s των αντιμεταθέσεων είναι πάντοτε άρτιο ή πάντοτε περιττό, σύμφωνα με το εάν η μετάθεση σ είναι αντιστοίχως άρτια ή περιττή, όπως αυτό καθορίζεται από το πρόσημο της μετάθεσης: $(-1)^{N(\sigma)} = (-1)^s$.*

Παράδειγμα Α.1 Θεωρούμε τη μετάθεση

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} , \tag{A.19}$$

όπου $N(\sigma) = 3$, καθώς και τις παρακάτω τρεις αντιμεταθέσεις:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} , \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} , \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} . \tag{A.20}$$

Προφανώς, έχουμε ότι

$$\sigma = \tau_2 \; . \tag{A.21}$$

Είναι επίσης εύκολο να ελεγχθεί ότι η μετάθεση σ εκφράζεται ισοδύναμα και ως σύνθεση των τριών αντιμεταθέσεων, τ_1, τ_2, τ_3, με την παρακάτω μορφή

$$\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \tau_3 \; . \tag{A.22}$$

Παρατηρούμε ότι, και στις δύο περιπτώσεις (Α.21)–(Α.22), η μετάθεση σ εκφράζεται ως σύνθεση ενός περιττού πλήθους αντιμεταθέσεων, όπως είναι αναμενόμενο από το γεγονός ότι η εν λόγω μετάθεση είναι περιττή: $(-1)^{N(\sigma)} = -1$. Σύμφωνα με την πρόταση Α.5, είναι *αδύνατον* να εκφράσουμε τη μετάθεση (Α.19), σ, ως σύνθεση ενός άρτιου πλήθους αντιμεταθέσεων.

Το θεώρημα Α.3 αποδεικνύει, μεταξύ άλλων, και την ύπαρξη τουλάχιστον μίας περιττής μετάθεσης. Από την άλλη μεριά, γνωρίζουμε ήδη την ύπαρξη τουλάχιστον μίας άρτιας μετάθεσης, της ταυτοτικής. Γενικότερα, ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα Α.6 *Το πλήθος των άρτιων μεταθέσεων ισούται με το πλήθος των περιττών μεταθέσεων.*

Απόδειξη: Έστω ρ μια δοσμένη περιττή μετάθεση. Εάν σ είναι μια τυχαία άρτια μετάθεση, τότε λόγω του θεωρήματος Α.1 η μετάθεση $\rho \circ \sigma$ είναι περιττή. Έχουμε λοιπόν μιαν απεικόνιση

$$\sigma \mapsto \rho \circ \sigma \; , \tag{A.23}$$

του συνόλου των άρτιων μεταθέσεων στο σύνολο των περιττών μεταθέσεων. Παρατηρούμε τώρα ότι, για κάθε περιττή μετάθεση ρ_0, υπάρχει μια άρτια μετάθεση σ_0 (συγκεκριμένα, η $\sigma_0 \equiv \rho^{-1} \circ \rho_0$), τέτοια ώστε: $\rho \circ \sigma_0 = \rho_0$. Επιπλέον, εάν σ_1 και σ_2 είναι δύο μεταθέσεις τέτοιες ώστε $\rho \circ \sigma_1 = \rho \circ \sigma_2$, τότε πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με ρ^{-1} και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\rho^{-1} \circ \rho = \epsilon$, θα έχουμε: $\epsilon \circ \sigma_1 = \epsilon \circ \sigma_2$ και συνεπώς $\sigma_1 = \sigma_2$.

Συνοψίζοντας, βλέπουμε ότι η (Α.23) αποτελεί μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση των άρτιων μεταθέσεων στις περιττές. Επομένως, το πλήθος των άρτιων μεταθέσεων είναι αναγκαστικά ίσο με το πλήθος των περιττών μεταθέσεων. ■

Το πλήθος των μεταθέσεων του συνόλου S_n ισούται με το πλήθος των δυνατών διατάξεων των στοιχείων $1, 2, \ldots, n$, δηλ. ισούται με $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$. Επομένως, από το θεώρημα Α.6 συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν $n!/2$ το πλήθος άρτιες μεταθέσεις και $n!/2$ το πλήθος περιττές μεταθέσεις.

Το σύνολο των μεταθέσεων ως μια ομάδα

Το σύνολο των μεταθέσεων των n το πλήθος στοιχείων του συνόλου $S_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ διαπιστώσαμε ότι έχει, μεταξύ άλλων, τις εξής ιδιότητες: (α) η ταυτοτική μετάθεση είναι μια μετάθεση, (β) το αντίστροφο μιας μετάθεσης είναι επίσης μια μετάθεση, (γ) η σύνθεση δύο μεταθέσεων είναι επίσης μια μετάθεση. Επομένως, το σύνολο των μεταθέσεων των n το πλήθος στοιχείων του συνόλου $S_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ αποτελεί μια "ομάδα" κάτω από την προσεταιριστική διμελή πράξη της σύνθεσης μεταθέσεων.

A.2 Πίνακες μεταθέσεων

Έστω μια μετάθεση σ

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} , \tag{A.24}$$

και ο $n \times n$ ταυτοτικός πίνακας I

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1^{\mathrm{T}} \\ e_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ e_n^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} . \tag{A.25}$$

Εξ ορισμού, ο $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας μετάθεσης P_σ που αντιστοιχεί στη μετάθεση σ ισούται με

$$P_\sigma = \begin{bmatrix} e_{\sigma(1)}^{\mathrm{T}} \\ e_{\sigma(2)}^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ e_{\sigma(n)}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} . \tag{A.26}$$

Με άλλα λόγια, η γραμμή i του πίνακα μετάθεσης P_σ ισούται με τη γραμμή $\sigma(i)$ του ταυτοτικού πίνακα I. Πιο αναλυτικά, έχουμε ότι

$$(P_\sigma)_{ij} = \delta_{\sigma(i),j} \ , \quad \text{για κάθε} \ \ i, j = 1, 2, \ldots, n \ . \tag{A.27}$$

Είναι φανερό ότι κάθε πίνακας μετάθεσης είναι ένας τετραγωνικός πίνακας που έχει ένα μόνο "1" σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη και μηδενικά οπουδήποτε αλλού. Το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού από τα *αριστερά* με τον $n \times n$ τετραγωνικό πίνακα μετάθεσης P_σ ενός $n \times p$ παραλληλόγραμμου πίνακα A είναι μια αντίστοιχη μετάθεση σ των γραμμών του A

$$P_\sigma A = \begin{bmatrix} a_{\sigma(1)1} & a_{\sigma(1)2} & \cdots & a_{\sigma(1)p} \\ a_{\sigma(2)1} & a_{\sigma(2)2} & \cdots & a_{\sigma(2)p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\sigma(n)1} & a_{\sigma(n)2} & \cdots & a_{\sigma(n)p} \end{bmatrix} . \tag{A.28}$$

Ο πίνακας μετάθεσης που αντιστοιχεί στην ταυτοτική μετάθεση ισούται με τον ταυτοτικό πίνακα: $P_\epsilon = I$. Από τον ορισμό (A.26) έπεται ότι: δύο πίνακες μετάθεσης είναι ίσοι εάν και μόνον εάν αντιστοιχούν στην ίδια μετάθεση, με άλλα λόγια, ισχύει ότι

$$P_\sigma = P_{\sigma'} \Longleftrightarrow \sigma = \sigma' \ . \tag{A.29}$$

Παράδειγμα A.2 Για τη μετάθεση

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} , \tag{A.30}$$

ο αντίστοιχος πίνακας μετάθεσης P_σ έχει τη μορφή

$$P_\sigma = \begin{bmatrix} e^{\mathrm{T}}_{\sigma(1)} \\ e^{\mathrm{T}}_{\sigma(2)} \\ e^{\mathrm{T}}_{\sigma(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\mathrm{T}}_{2} \\ e^{\mathrm{T}}_{3} \\ e^{\mathrm{T}}_{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \tag{A.31}$$

Με άλλα λόγια, σύμφωνα με τον τύπο (A.27), έχουμε ότι

$$(P_\sigma)_{1,j} = \delta_{\sigma(1),j} = \delta_{2,j} \ , \quad \text{για κάθε } \ j = 1, 2, 3 \ , \tag{A.32}$$

$$(P_\sigma)_{2,j} = \delta_{\sigma(2),j} = \delta_{3,j} \ , \quad \text{για κάθε } \ j = 1, 2, 3 \ , \tag{A.33}$$

$$(P_\sigma)_{3,j} = \delta_{\sigma(3),j} = \delta_{1,j} \ , \quad \text{για κάθε } \ j = 1, 2, 3 \ . \tag{A.34}$$

Λήμμα A.7 *Έστω δύο μεταθέσεις ρ και σ. Ισχύει ότι*

$$P_{\rho\circ\sigma} = P_\sigma P_\rho \ . \tag{A.35}$$

Με άλλα λόγια, ο πίνακας μετάθεσης που αντιστοιχεί στη σύνθεση δύο μεταθέσεων ισούται με το γινόμενο των επιμέρους πινάκων μετάθεσης σε αντίστροφη διάταξη.

Απόδειξη: Με τη βοήθεια του γνωστού κανόνα πολλαπλασιασμού πινάκων και του τύπου (A.27) έχουμε διαδοχικά ότι

$$\begin{aligned} (P_\sigma P_\rho)_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} (P_\sigma)_{ik} (P_\rho)_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \delta_{\sigma(i),k} \delta_{\rho(k),j} \\ &= \delta_{\rho(\sigma(i)),j} = \delta_{(\rho\circ\sigma)(i),j} = (P_{\rho\circ\sigma})_{ij} \ , \end{aligned} \tag{A.36}$$

για κάθε $i, j = 1, 2, \ldots, n$, ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξή μας. ■

Το αποτέλεσμα του λήμματος A.7 μπορεί να γενικευθεί για οποιοδήποτε πλήθος μεταθέσεων, όπως σημειώνεται στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα A.8 *Έστω ένα σύνολο μεταθέσεων $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_s$. Ισχύει ότι*

$$P_{\sigma_1\circ\sigma_2\circ\cdots\circ\sigma_s} = P_{\sigma_s} \cdots P_{\sigma_2} P_{\sigma_1} \ . \tag{A.37}$$

Με άλλα λόγια, ο πίνακας μετάθεσης που αντιστοιχεί στη σύνθεση ενός συνόλου μεταθέσεων ισούται με το γινόμενο των επιμέρους πινάκων μετάθεσης σε αντίστροφη διάταξη.

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε το θεώρημα με τη μέθοδο της επαγωγής για τον θετικό ακέραιο δείκτη s, δηλ. για το πλήθος εμφανιζόμενων μεταθέσεων $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_s$.

Για $s = 1$ το θεώρημα προφανώς ισχύει δεδομένου ότι η (A.37) ανάγεται στην τετριμμένη ταυτότητα: $P_{\sigma_1} = P_{\sigma_1}$. Υποθέτουμε τώρα ότι $s > 1$ και ότι το θεώρημα ισχύει για κάθε $s-1$ το πλήθος μεταθέσεις. Στη συνέχεια, θεωρούμε τις s το πλήθος μεταθέσεις $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_s$. Αξιοποιώντας την προσεταιριστική ιδιότητα της σύνθεσης μεταθέσεων έχουμε ότι

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \cdots \circ \sigma_s = (\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \cdots \circ \sigma_{s-1}) \circ \sigma_s \ . \tag{A.38}$$

Συνεπώς, εφαρμόζοντας το λήμμα A.7 έχουμε διαδοχικά ότι

$$\begin{aligned} P_{\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \cdots \circ \sigma_s} &= P_{(\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \cdots \circ \sigma_{s-1}) \circ \sigma_s} \\ &= P_{\sigma_s} P_{\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \cdots \circ \sigma_{s-1}} \\ &= P_{\sigma_s} (P_{\sigma_{s-1}} \cdots P_{\sigma_2} P_{\sigma_1}) \\ &= P_{\sigma_s} \cdots P_{\sigma_2} P_{\sigma_1} \ . \end{aligned} \tag{A.39}$$

Τονίζουμε ότι στην τρίτη ισότητα της (A.39) χρησιμοποιήσαμε την επαγωγική μας υπόθεση σύμφωνα με την οποία: $P_{\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \cdots \circ \sigma_{s-1}} = P_{\sigma_{s-1}} \cdots P_{\sigma_2} P_{\sigma_1}$. Επιπλέον, στην τέταρτη ισότητα της (A.39) αγνοήσαμε τις παρενθέσεις ενόψει της προσαιτεριστικής ιδιότητας του πολλαπλασιασμού πινάκων. Με τις παρατηρήσεις αυτές ολοκληρώνουμε την απόδειξή μας. ■

Υπενθυμίζουμε ότι κάθε μετάθεση σ ικανοποιεί τη σχέση: $\sigma \circ \sigma^{-1} = \epsilon = \sigma^{-1} \circ \sigma$. Συνεπώς, εφαρμόζοντας το λήμμα A.7 συμπεραίνουμε ότι: $P_{\sigma^{-1}} P_\sigma = I = P_\sigma P_{\sigma^{-1}}$, ή ισοδύναμα $(P_\sigma)^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$. Το τελευταίο αυτό αποτέλεσμα συνοψίζεται στο πόρισμα που ακολουθεί.

Πόρισμα A.9 *Κάθε πίνακας μετάθεσης P_σ, που αντιστοιχεί σε μια μετάθεση σ, είναι αντιστρέψιμος. Συγκεκριμένα, ισχύει ότι*

$$(P_\sigma)^{-1} = P_{\sigma^{-1}} \ . \tag{A.40}$$

Με άλλα λόγια, ο αντίστροφος του P_σ ισούται με τον πίνακα μετάθεσης $P_{\sigma^{-1}}$, που αντιστοιχεί στην αντίστροφη μετάθεση σ^{-1}.

Στην ειδική περίπτωση μιας αντιμετάθεσης (A.14), τ, όπου εναλλάσσονται δύο στοιχεία $i \neq j$, ο αντίστοιχος πίνακας μετάθεσης $P_\tau \equiv P_{ij}$ λέγεται "πίνακας εναλλαγής". Το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού από τα *αριστερά* με τον $n \times n$ τετραγωνικό πίνακα εναλλαγής $P_\tau \equiv P_{ij}$ ενός $n \times p$ παραλληλόγραμμου πίνακα A είναι η εναλλαγή των δύο γραμμών i και j του A.[1] Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι

$$P_\tau \equiv P_{ij} = I - (e_i - e_j)(e_i - e_j)^{\mathrm{T}} \ . \tag{A.41}$$

Υπενθυμίζουμε ότι κάθε αντιμετάθεση τ ικανοποιεί τη σχέση: $\tau \circ \tau = \epsilon$, ή ισοδύναμα $\tau^{-1} = \tau$. Συνεπώς, εφαρμόζοντας το λήμμα A.7 συμπεραίνουμε ότι: $(P_\tau)^2 = I$, ή ισοδύναμα $(P_\tau)^{-1} = P_\tau$. Με τη βοήθεια της ταυτότητας (A.41) ελέγχεται επίσης εύκολα ότι: $(P_\tau)^{\mathrm{T}} = P_\tau$. Συνοψίζουμε τις δύο αυτές χρήσιμες ιδιότητες των πινάκων εναλλαγής σε μια πρόταση.

[1] Το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού από τα *δεξιά* με τον $n \times n$ τετραγωνικό πίνακα εναλλαγής $P_\tau \equiv P_{ij}$ ενός $p \times n$ παραλληλόγραμμου πίνακα A είναι η εναλλαγή των δύο στηλών i και j του A.

Πρόταση A.10 *Κάθε πίνακας εναλλαγής P_τ, που αντιστοιχεί σε μια αντιμετάθεση τ, ικανοποιεί τις σχέσεις*

$$(P_\tau)^{-1} = P_\tau = (P_\tau)^{\mathrm{T}} \; . \qquad (A.42)$$

Με άλλα λόγια, κάθε πίνακας εναλλαγής ισούται με τον αντίστροφό του καθώς και με τον ανάστροφό του.

Από το θεώρημα A.4 γνωρίζουμε ότι κάθε μετάθεση σ μπορεί να εκφρασθεί ως μια σύνθεση αντιμεταθέσεων, $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_s$,

$$\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_s \; , \qquad (A.43)$$

όπου το πλήθος s των αντιμεταθέσεων αυτών είναι πάντοτε άρτιο εάν η μετάθεση είναι άρτια, ή πάντοτε περιττό εάν η μετάθεση είναι περιττή, όπως αυτό καθορίζεται από το πρόσημο της μετάθεσης: $(-1)^{N(\sigma)} = (-1)^s$. Ενόψει των (A.37) και (A.29) έπεται ισοδύναμα από την (A.43) ότι ο αντίστοιχος πίνακας μετάθεσης, P_σ, μπορεί να εκφρασθεί ως το γινόμενο των πινάκων εναλλαγής, $P_{\tau_1}, P_{\tau_2}, \ldots, P_{\tau_s}$,

$$P_\sigma = P_{\tau_s} \cdots P_{\tau_2} P_{\tau_1} \; . \qquad (A.44)$$

Συνοπτικά λοιπόν, έχουμε αποδείξει και τυπικά το παρακάτω εύλογο θεώρημα.

Θεώρημα A.11 *Κάθε πίνακας μετάθεσης μπορεί να εκφρασθεί ως ένα γινόμενο πινάκων εναλλαγής.*

Η πρόταση που ακολουθεί αναδεικνύει το γεγονός ότι οι πίνακες μετάθεσης αποτελούν μέλη μιας ευρύτερης οικογένειας πινάκων, των λεγόμενων ορθογώνιων πινάκων.

Πρόταση A.12 *Κάθε πίνακας μετάθεσης P_σ, που αντιστοιχεί σε μια μετάθεση σ, ικανοποιεί τη σχέση: $(P_\sigma)^{-1} = (P_\sigma)^{\mathrm{T}}$. Το αποτέλεσμα διατυπώνεται ισοδύναμα και ως εξής*

$$(P_\sigma)^{\mathrm{T}} P_\sigma = I = P_\sigma (P_\sigma)^{\mathrm{T}} \; . \qquad (A.45)$$

Με άλλα λόγια, κάθε πίνακας μετάθεσης είναι ένας ορθογώνιος πίνακας.

Απόδειξη: Με αφετηρία την έκφραση (A.44) ενός οποιουδήποτε πίνακα μετάθεσης P_σ ως γινομένου κατάλληλων πινάκων εναλλαγής, και αξιοποιώντας την ιδιότητα (A.42), έχουμε διαδοχικά ότι

$$\begin{aligned}
(P_\sigma)^{-1} &= (P_{\tau_s} \cdots P_{\tau_2} P_{\tau_1})^{-1} \\
&= (P_{\tau_1})^{-1} (P_{\tau_2})^{-1} \cdots (P_{\tau_s})^{-1} \\
&= (P_{\tau_1})^{\mathrm{T}} (P_{\tau_2})^{\mathrm{T}} \cdots (P_{\tau_s})^{\mathrm{T}} \\
&= (P_{\tau_s} \cdots P_{\tau_2} P_{\tau_1})^{\mathrm{T}} \\
&= (P_\sigma)^{\mathrm{T}} \; .
\end{aligned} \qquad (A.46)$$

Το αποτέλεσμα (A.46) μπορεί προφανώς να διατυπωθεί και με τη μορφή της εξίσωσης (A.45) η οποία αποτελεί την ιδιότητα-ορισμό ενός ορθογώνιου πίνακα, ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξή μας.

Στο σημείο αυτό αξίζει να παρουσιάσουμε και μια δεύτερη εναλλακτική απόδειξη της εξίσωσης (A.45) η οποία *δεν* χρησιμοποιεί την παραγοντοποίηση (A.44) του πίνακα μετάθεσης σε γινόμενο πινάκων εναλλαγής. Συγκεκριμένα, με αφετηρία τον ορισμό (A.26) του πίνακα μετάθεσης P_σ και χρησιμοποιώντας τον κανόνα πολλαπλασιασμού πινάκων "γραμμές επί στήλες" έχουμε διαδοχικά ότι

$$\begin{aligned}(P_\sigma(P_\sigma)^{\mathrm{T}})_{ij} &= e^{\mathrm{T}}_{\sigma(i)}e_{\sigma(j)} \\ &= \delta_{\sigma(i),\sigma(j)} \\ &= \delta_{ij} = (I)_{ij}\ , \quad \text{για κάθε}\ \ i,j = 1,2,\ldots,n\ ,\end{aligned} \tag{A.47}$$

ή ισοδύναμα $P_\sigma(P_\sigma)^{\mathrm{T}} = I$. Με ανάλογο τρόπο, χρησιμοποιώντας τον κανόνα πολλαπλασιασμού πινάκων "στήλες επί γραμμές" έχουμε διαδοχικά ότι

$$\begin{aligned}((P_\sigma)^{\mathrm{T}}P_\sigma)_{ij} &= (e_{\sigma(1)}e^{\mathrm{T}}_{\sigma(1)} + \cdots + e_{\sigma(n)}e^{\mathrm{T}}_{\sigma(n)})_{ij} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n}(e_{\sigma(\ell)})_{i1}(e^{\mathrm{T}}_{\sigma(\ell)})_{1j} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n}\delta_{i,\sigma(\ell)}\delta_{\sigma(\ell),j} \\ &= \delta_{ij} = (I)_{ij}\ , \quad \text{για κάθε}\ \ i,j = 1,2,\ldots,n\ ,\end{aligned} \tag{A.48}$$

ή ισοδύναμα $(P_\sigma)^{\mathrm{T}}P_\sigma = I$, ολοκληρώνοντας έτσι τη δεύτερη απόδειξή μας. ■

Δεδομένου ότι για κάθε πίνακα εναλλαγής ισχύει ότι $(P_\tau)^2 = I$, η (A.44) γράφεται ισοδύναμα με τη μορφή

$$(P_{\tau_1}P_{\tau_2}\cdots P_{\tau_s})P_\sigma = I\ . \tag{A.49}$$

Η ισοδυναμία της (A.49) με την (A.43) οδηγεί αμέσως σε μια σημαντική πρόταση.

Πρόταση A.13 *Ανεξάρτητα από την ειδική ακολουθία εναλλαγών γραμμών που οδηγούν έναν πίνακα μετάθεσης P_σ στον ταυτοτικό πίνακα I, το πλήθος s των εναλλαγών είναι πάντοτε άρτιο ή πάντοτε περιττό, σύμφωνα με το εάν η μετάθεση σ είναι αντιστοίχως άρτια ή περιττή, όπως αυτό καθορίζεται από το πρόσημο της μετάθεσης: $(-1)^{N(\sigma)} = (-1)^s$.*

Η παραπάνω πρόταση αποδεικνύει ότι δεν υπάρχει ασάφεια στην τιμή της ορίζουσας ενός πίνακα μετάθεσης, $\det(P_\sigma)$, όπως αυτή προκύπτει από την εφαρμογή των γνωστών κανόνων $1,2,3$ της ορίζουσας. Η εν λόγω τιμή είναι, πράγματι, καλώς ορισμένη και ίση με το πρόσημο της μετάθεσης σ, δηλαδή

$$\det(P_\sigma) = (-1)^{N(\sigma)} = \pm 1\ . \tag{A.50}$$

Επαναλαμβάνουμε ότι: το πρόσημο που εμφανίζεται στην (A.50) είναι το πρόσημο της μετάθεσης σ και ισούται με $(+)$ ή $(-)$, σύμφωνα με το εάν η μετάθεση σ είναι άρτια ή περιττή, δηλ. σύμφωνα με το εάν ο ολικός αριθμός αναστροφών $N(\sigma)$ της μετάθεσης είναι άρτιος ή περιττός, αντιστοίχως. Ισοδύναμα μπορούμε να πούμε ότι: το πρόσημο που εμφανίζεται στην (A.50) ισούται με $(+)$ ή $(-)$, σύμφωνα με το εάν το πλήθος s των εναλλαγών γραμμών που οδηγούν τον πίνακα μετάθεσης P_σ στον ταυτοτικό πίνακα I είναι άρτιο ή περιττό, αντιστοίχως.

Το σύνολο των πινάκων μετάθεσης ως μια ομάδα

Το σύνολο των $n \times n$ τετραγωνικών πινάκων μετάθεσης διαπιστώσαμε ότι έχει, μεταξύ άλλων, τις εξής ιδιότητες: (α) ο ταυτοτικός πίνακας είναι ένας πίνακας μετάθεσης, (β) ο αντίστροφος ενός πίνακα μετάθεσης είναι επίσης ένας πίνακας μετάθεσης, (γ) το γινόμενο δύο πινάκων μετάθεσης είναι επίσης ένας πίνακας μετάθεσης. Επομένως, το σύνολο των $n\times n$ τετραγωνικών πινάκων μετάθεσης αποτελεί μια "ομάδα" κάτω από την προσεταιριστική διμελή πράξη του πολλαπλασιασμού πινάκων. Το αποτέλεσμα αυτό συνάδει με το γεγονός ότι το αντίστοιχο σύνολο των μεταθέσεων των n το πλήθος στοιχείων του συνόλου $S_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ αποτελεί επίσης μια "ομάδα" κάτω από την προσεταιριστική διμελή πράξη της σύνθεσης μεταθέσεων.

Ο μεγάλος τύπος για την ορίζουσα

Θεωρούμε έναν $n \times n$ τετραγωνικό πίνακα A

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} . \tag{A.51}$$

Με αφετηρία τους γνωστούς κανόνες $1, 2, 3$ για τον ορισμό της ορίζουσας, $\det(A) \equiv |A|$, έχουμε δείξει ότι

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma} \det(P_\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \ , \tag{A.52}$$

όπου το σ-άθροισμα εκτείνεται πάνω σε όλες τις $n!$ το πλήθος μεταθέσεις των στοιχείων του συνόλου $S_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Το αποτέλεσμα (A.52) αναφέρεται ως "ο μεγάλος τύπος" για την ορίζουσα και ενόψει της (A.50) μπορεί να γραφεί ισοδύναμα με τη μορφή

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma} (-1)^{N(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \ . \tag{A.53}$$

Από το δεξιό μέλος της (A.53), ή ισοδύναμα της (A.52), γίνεται φανερό ότι η ορίζουσα ενός $n \times n$ τετραγωνικού πίνακα αποτελείται από ένα άθροισμα $n!$ όρων, καθένας εκ των οποίων είναι ένα γινόμενο n στοιχείων.

Παράδειγμα A.3 Έστω $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ένας 2×2 τετραγωνικός πίνακας. Υπάρχουν συνολικά $2! = 2$ μεταθέσεις των στοιχείων του συνόλου $S_2 = \{1, 2\}$, συγκεκριμένα οι εξής:

$$\epsilon \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} , \quad \text{με} \ \ (-1)^{N(\epsilon)} = +1 \ , \tag{A.54}$$

$$\tau \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} , \quad \text{με} \ \ (-1)^{N(\tau)} = -1 \ . \tag{A.55}$$

Επομένως, η ορίζουσα του τετραγωνικού πίνακα A δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= (-1)^{N(\epsilon)} a_{1\epsilon(1)} a_{2\epsilon(2)} + (-1)^{N(\tau)} a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \; . \end{aligned} \tag{A.56}$$

Παράδειγμα Α.4 Έστω $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ ένας 3×3 τετραγωνικός πίνακας. Υπάρχουν συνολικά $3! = 6$ μεταθέσεις των στοιχείων του συνόλου $S_3 = \{1, 2, 3\}$, συγκεκριμένα οι εξής:

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} , \quad \text{με} \;\; (-1)^{N(\epsilon)} = +1 \; , \tag{A.57}$$

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} , \quad \text{με} \;\; (-1)^{N(\rho_1)} = +1 \; , \tag{A.58}$$

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} , \quad \text{με} \;\; (-1)^{N(\rho_2)} = +1 \; , \tag{A.59}$$

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} , \quad \text{με} \;\; (-1)^{N(\tau_1)} = -1 \; , \tag{A.60}$$

$$\tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} , \quad \text{με} \;\; (-1)^{N(\tau_2)} = -1 \; , \tag{A.61}$$

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} , \quad \text{με} \;\; (-1)^{N(\tau_3)} = -1 \; . \tag{A.62}$$

Επομένως, η ορίζουσα του τετραγωνικού πίνακα A δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ &\quad + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} \; . \end{aligned} \tag{A.63}$$